



DS 1 - lundi 7 octobre

Durée : 50 min

Nom : Prénom :

Exercice 1.

10 points

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur \mathbb{N} par : $u_0 = -1$, $u_1 = \frac{1}{2}$

et, pour tout entier naturel n , $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.

(a) Calculer v_0 .

(b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .

(c) En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ puis exprimer v_n en fonction de n .

3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n : $w_n = \frac{u_n}{v_n}$.

(a) Calculer w_0 .

(b) En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n .

(c) En déduire que pour tout n de \mathbb{N} , $w_{n+1} = w_n + 2$.

Que peut-on en déduire quant à la nature de la suite (w_n) ?

(d) Exprimer w_n en fonction de n .

4. Déduire des questions 2c et 3d que, pour tout entier naturel n : $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$

5. Pour tout entier naturel n , on pose : $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Démontrer par récurrence que pour tout n de \mathbb{N} : $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$.



Correction

On sait que (u_n) est définie sur \mathbb{N} par : $u_0 = -1$, $u_1 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.

1. ◦ Déterminons u_2

[0.5]

D'après la définition $u_2 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Donc $u_2 = \frac{3}{4}$.

◦ Nature de la suite (u_n)

[0.5]

• Comme $\frac{u_1}{u_0} = -\frac{1}{2}$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$ alors $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$

Donc la suite (u_n) n'est pas géométrique

• Comme $u_1 - u_0 = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}$ et $u_2 - u_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ alors $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$

Donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique

Donc : la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2. On a la suite (v_n) : pour tout entier naturel n : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.

(a) $v_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times (-1) = 1$.

[0.5]

Donc $v_0 = 1$.

(b) Exprimons v_{n+1} en fonction de v_n .

[1]

On a pour tout naturel n ,

$$v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right) = \frac{1}{2}v_n.$$

Donc $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$.

(c) Comme $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$

[1]

On peut en déduire que la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$

et de raison $\frac{1}{2}$.

On a donc quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$.



Correction

3. On a la suite (w_n) : pour tout entier naturel n : $w_n = \frac{u_n}{v_n}$.

(a) $w_0 = \frac{u_0}{v_0} = \frac{-1}{1} = -1.$ [0.5]

Donc $w_0 = -1.$

(b) On sait que pour tout n , $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$ et $w_n = \frac{u_n}{v_n}$. [1]

$$\text{Pour tout } n, w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} = \frac{2v_n + u_n}{v_n} = 2 + \frac{u_n}{v_n}$$

Donc $w_{n+1} = 2 + \frac{u_n}{v_n}$

(c) On sait que pour tout n , $\frac{u_n}{v_n} = w_n$ et $w_{n+1} = 2 + \frac{u_n}{v_n}$ [0.5]
donc l'égalité ci-dessus s'écrit : $w_{n+1} = 2 + w_n.$

(d) On sait que pour tout n , $w_{n+1} = 2 + w_n$ [1]

On peut donc en déduire que la suite (w_n) est une suite arithmétique de premier terme

$w_0 = -1$ et de raison 2.

Donc pour tout n , $w_n = w_0 + n \times 2 = 2n - 1.$

4. Montrons que pour tout entier naturel n $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$. [1,5]

On a trouvé que $w_n = 2n - 1 = \frac{u_n}{v_n} = \frac{u_n}{\frac{1}{2^n}} = 2^n \times u_n.$

D'où $u_n = \frac{w_n}{2^n}$ car $2^n \neq 0$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Alors $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$

Donc $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$



Correction

5. On a pour tout entier naturel n , on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. [2]

Démontrons par récurrence la propriété : $\mathcal{P}_n : S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$

- Initialisation : $S_0 = u_0 = -1$ et $2 - \frac{2 \times 0 + 3}{2^0} = 2 - \frac{3}{1} = 2 - 3 = -1$.

La formule est vraie au rang 0.

- Hérédité : supposons qu'il existe un naturel n tel que : \mathcal{P}_n est vraie

$$S_k = \sum_{i=0}^n u_i = u_0 + u_1 + \dots + u_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

Montrons que la propriété : \mathcal{P}_{n+1} est vraie

$$\text{On a } S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$$

$$= 2 - \frac{2n+3}{2^n} + \frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}}$$

$$= 2 + \frac{-4n-6+2n+1}{2^{n+1}}$$

$$= 2 + \frac{-2n-5}{2^{n+1}}$$

$$= 2 - \frac{2n+5}{2^{n+1}}$$

$$= 2 - \frac{2(n+1)+3}{2^{n+1}}.$$

$$\text{Donc } S_{n+1} = 2 - \frac{2(n+1)+3}{2^{n+1}}.$$

La formule est vraie au rang $n+1$.

- Conclusion : Par initialisation au rang 0 et par hérédité, on a donc démontré par récurrence

que pour tout n de \mathbb{N} : $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$.

**Exercice 2.**

2 points

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Correction

Démontrons par récurrence que,

[0.5]

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}_{n+1} : S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

- Initialisation : Pour $n = 1$, la somme S_1 vaut 1 et $1^2 = 1$ donc $S_1 = 1^2$ [0.5]
la propriété est vraie pour le rang $n = 1$.

- Hérédité : on suppose P_n vraie pour un n quelconque, donc $S_n = n^2$. [0.5]

Montrons que la propriété : \mathcal{P}_{n+1} est vraie

$$\text{On a } S_{n+1} = S_n + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

Donc \mathcal{P}_{n+1} est vraie

- Conclusion : Par initialisation au rang 1 et par hérédité, on a donc démontré par récurrence que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Donc $\text{tout } n \in \mathbb{N}^* \quad 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ [0.5]

**Exercice 3.**

8 points

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels par $f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}$.

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1. Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble \mathbb{R} par $g(x) = 1 - x + e^x$.
 - (a) Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction g sur \mathbb{R} (les limites de g aux bornes de son ensemble de définition ne sont pas attendues).
 - (b) En déduire le signe de $g(x)$.
2. On appelle f' la dérivée de la fonction f sur \mathbb{R} .

Démontrer que, pour tout réel x , $f'(x) = e^{-x}g(x)$.
3. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur \mathbb{R} .
4.
 - (a) Démontrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 0.
 - (b) Etudier la position relative de la courbe \mathcal{C} et de la droite T .



Correction

1. On a g la fonction définie sur l'ensemble \mathbb{R} par $g(x) = 1 - x + e^x$. [2]

g est dérivable sur \mathbb{R} comme combinaison simple de fonctions qui le sont,
et pour tout réel x : $g'(x) = -1 + e^x$.

On a alors $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Le tableau de variations de g est donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
Variation de g			

On déduit du tableau précédent que, pour tout réel x , $g(x) \geq 2 > 0$. [0.5]

2. On a la fonction f définie sur l'ensemble \mathbb{R} par $f(x) = x + 1 + xe^{-x}$. [2]

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} comme combinaison simple de fonctions qui le sont,

Pour tout réel x , on a $f = u + v \times w$ d'où $f' = u' + (v'w + w'v)$

$$\text{avec } u(x) = x + 1 \quad u'(x) = 1$$

$$v(x) = x \quad v'(x) = 1$$

$$w(x) = e^{-x} \quad w'(x) = -e^{-x}$$

$$\begin{aligned}
 \text{D'où } f'(x) &= 1 + (1 \times e^{-x} + (-e^{-x}) \times x) \\
 &= 1 + e^{-x}(1 - x) \\
 &= e^{-x}(e^x + (1 - x)) \\
 &= e^{-x}(1 - x + e^x) \\
 &= e^{-x}g(x).
 \end{aligned}$$

Donc pour tout nombre réel x : $f'(x) = e^{-x}g(x)$.



Correction

3. On a démontré que pour tout nombre réel x : $f'(x) = e^{-x}g(x)$. [1.5]

On a vu plus haut que, pour tout réel x , $g(x) > 0$,

et comme par ailleurs $e^{-x} > 0$

Donc on en déduit que $f'(x) > 0$.

On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
Variation de f		

4. (a) L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 : $T_0 : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ [0.5]

Puisque $f'(x) = e^{-x}g(x)$, on obtient $f'(0) = 2$

Puisque $f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}$, on obtient $f(0) = 1$

Alors $T_0 : y = 2(x - 0) + 1$

Donc $T_0 : y = 2x + 1$

(b) On pose pour tout réel x , $k(x) = f(x) - (2x + 1)$, [1.5]

$$\begin{aligned}
 \text{Alors } k(x) &= x + 1 + \frac{x}{e^x} - (2x + 1) \\
 &= \frac{x}{e^x} - x \\
 &= \frac{x}{e^x} (1 - e^x)
 \end{aligned}$$

Dressons alors un tableau de signes :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	0	+
e^x	+		+
$1 - e^x$	+	0	-
$k(x)$	-	0	-

On en déduit que \mathcal{C} est située en dessous de T .